CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

Patronato «Alfonso el Sabio»

4.ª Serie. - Tomo IX | 1949 | Número 1

REVISTA MATEMATICA HISPANO-AMERICANA

PUBLICADA POR EL INSTITUTO «JORGE JUAN» DE MATEMATICAS Y LA REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA

MADRID

1949

Nuevas Gráficas, S. A.—Tel. 23 30 29

CUERPOS ORDENABLES CON AUTOMORFISMO UNICO

por

PEDRO ABELLANAS

INTRODUCCION

Es sabido que, la condición necesaria y suficiente para que la definición de proyectividad de Poncelet coincida con la de Staudt para el espacio proyectivo real, es que el cuerpo base del espacio proyectivo posea un automorfismo único; de aquí el interés de determinar una condición necesaria y suficiente para que un cuerpo posea automorfismo único. El objeto de la presente nota es dar tal condición para los cuerpos ordenables.

1. *Postulado cuadrático.* Un cuerpo ordenable se dice que satisface al postulado cuadrático, cuando las raíces cuadradas de todos sus elementos positivos pertenecen a él.

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que un cuerpo ordenable posea automorfismo único es que la ordenación sea arquimediana y que satisfaga al postulado cuadrático.*

Demostración. 1.° *El Postulado de Arquimedes es necesario.* Sea K el cuerpo de todas las series de potencias formales:

$$a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + \dots$$

sobre el cuerpo, R, de los números reales: $a_0, a_1, \dots, \varepsilon$, R, m es un número racional entero y x una indeterminada sobre R.

Sea $K^* = K(\sqrt{x}, \sqrt[2^2]{x}, \dots, \sqrt[2^i]{x}, \dots)$ el cuerpo que resulta de efectuar la adjunción a K de todas las raíces de x de índices iguales a una potencia de exponente natural de dos.

Los elementos, $\varkappa$, de K^* serán de la forma

$$\varkappa = [a_{00} x^{m_0} + a_{01} x^{m_0+1} + \dots] + x^{\frac{\beta_1}{2^{\alpha_1}}} [a_{10} x^{m_1} + a_{11} x^{m_1+1} + \dots] + \dots$$
$$+ x^{\frac{\beta_n}{2^{\alpha_n}}} [a_{n0} x^{m_n} + \dots] \qquad [1]$$

en donde las expresiones de los paréntesis partenecen a K y el número de raíces de x distintas que en ellos figuran es finito. Sea $m_i + \frac{\beta_i}{2^{\alpha_i}} = \text{mín.}\left\{ m_0, m_1 + \frac{\beta_1}{2^{\alpha_1}}, \ldots, m_n + \frac{\beta_n}{2^{\alpha_n}} \right\}$; al término $a_{i0}\, x^{m_i + \frac{\beta_i}{2^{\alpha_i}}}$, $a_{i0} \neq 0$, se le llama *principal*, y a su coeficiente *director*, del elemento $\varkappa$.

Definición.—Diremos que el elemento $\varkappa$ es positivo si, y sólo si, lo es su coeficiente director.

La demostración de esta primera parte la subdividiremos en otras tres:

a) *Mediante la definición anterior queda ordenado el cuerpo* K^*.—En efecto [1]: I. Si $\varkappa > 0$ será $a_{i0} >$, luego $\varkappa \neq 0$ y el coeficiente director, $-a_{i0}$, de $-\varkappa$ será negativo, luego $-\varkappa \not> 0$ y $-\varkappa \neq 0$. Si $\varkappa < 0$, será $a_{i0} < 0$ y el coeficiente director de $-\varkappa$ será positivo, luego $-\varkappa > 0$.

II. Supongamos que el elemento $\varkappa$, (1), de término principal $a_{i0}\, x^{m_i + \frac{\beta_i}{2^{\alpha_i}}}$ es positivo así como el elemento:

$$\varkappa' = [a'_{00}\, x^{m'_0} + a'_{01}\, x^{m'_0+1} + \ldots] + x^{\frac{\beta'_1}{2^{\alpha'_1}}} [a'_{10}\, x^{m'_1} + a'_{11}\, x^{m'_1+1} + \ldots] + \ldots$$
$$+ x^{\frac{\beta'_{n'}}{2^{\alpha'_{n'}}}} [a'_{n'_0}\, x^{m'_{n'}} + \ldots]$$

de término principal $a'_{i'_0}\, x^{m'_{i'} + \frac{\beta'_{i'}}{2^{\alpha'_{i'}}}}$. El término principal de $\varkappa + \varkappa'$ será:

$$a_{i0}\, x^{m_i + \frac{\beta_i}{2^{\alpha_i}}}, \quad a'_{i'_0}\, x^{m'_{i'} + \frac{\beta'_{i'}}{2^{\alpha'_{i'}}}}, \quad \text{o,} \quad (a_{i0} + a'_{i'_0})\, x^{m_i + \frac{\beta_i}{2^{\alpha_i}}}$$

según que

$$m_i + \frac{\beta_i}{2^{\alpha_i}} \lesseqgtr m'_{i'} + \frac{\beta'_{i'}}{2^{\alpha'_{i'}}}$$

respectivamente. En los tres casos resulta que $\varkappa + \varkappa' > 0$. El término principal de $\varkappa\varkappa'$ es $a_{i0}\, a'_{i'_0}\, x^{m_i + m'_{i'} + \frac{\beta_i}{2^{\alpha_i}} + \frac{\beta'_{i'}}{2^{\alpha'_{i'}}}}$ luego, $\varkappa\varkappa' > 0$. c. q. d.

La ordenación de K^* que acabamos de definir es, evidentemente, no arquimediana.

b) K^* *satisface al postulado cuadrático.*—En efecto, consideremos los cuerpos: $K_1 = K(\sqrt{x})$, $K_2 = K_1(\sqrt[4]{x})$, ..., $K_r = K_{r-1}(\sqrt[2^r]{x})$, ... Todo elemento, $\varkappa \in K^*$, por poseer un número finito de raíces de x, goza de la propiedad de pertenecer a uno de los cuerpos K_i, $i=0, 1, 2, \ldots$ y de no pertenecer al anterior; si $\varkappa$ pertenece a K_r y no pertenece a K_{r-1} diremos que es un elemento *propio* de K_r. Representaremos por P al anillo de todas las series de potencias de x sobre R de exponentes enteros no negativos y por P^* al anillo $P[\sqrt{x}, \sqrt[2^2]{x}, \ldots, \sqrt[2^r]{x}, \ldots]$. Las unidades de P^* están caracterizadas porque su término principal es un número real.

Para demostrar la proposición *b*), demostraremos previamenel siguiente: LEMA. *Toda unidad positiva de* P^* *que es elemento propio de* K_r, *posee raíz cuadrada que pertenece también a* K_r *y es unidad de* P^*. La demostración la haremos por inducción respecto de r. Sea $\varkappa_0$ una unidad positiva de $K_0 = K$:

$$\varkappa_0 = a_0 + a_1 x + \ldots, \quad a_0 > 0$$

y sea

$$\zeta_0 = b_0 + b_1 x + b_1 x^2 + \ldots$$

entonces,

$$\zeta_0^2 = b_0^2 + 2\, b_0 b_1 x + (b_1^2 + 2\, b_0 b_2) x^2 + \ldots$$

luego, se pueden determinar las b_i, sucesivamente, mediante las relaciones

$$\begin{aligned} b_0^2 &= a_0 \\ 2\, b_0 b_1 &= a_1 \\ b_1^2 + 2\, b_0 b_2 &= a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

de modo que $\zeta_0^2 = \varkappa_0$ y $b_0 = \pm\sqrt{a_0} \neq 0$.

Supongamos demostrado el lema para todo $i < r$ y vamos a demostrarlo para $i = r$. Sea $\varkappa_r$ una unidad positiva de P^*, que es elemento propio de K_r; entonces se podrá poner en la forma

$$\varkappa_r = \varkappa_{r-1} + x^{2^{-r}} \varkappa'_{r-1}, \qquad \varkappa_{r-1}, \varkappa'_{r-1} \in K_{r-1}$$

siendo $\varkappa_{r-1}$ unidad positiva de P*. Sea $\zeta_r = \zeta_{r-1} + x^{2^{-r}}\zeta'_{r-1}$ en donde ζ_{r-1} y ζ'_{r-1} pertenecen a K_{r-1} y pongamos:

$$\zeta_r^2 = \zeta_{r-1}^2 + x^{2^{-(r-1)}}\zeta'^2_{r-1} + 2x^{2^{-r}}\zeta_{r-1}\zeta'_{r-1} = \varkappa_r$$

entonces será

$$\zeta_{r-1}^2 + x^{2^{-(r-1)}}\zeta'^2_{r-1} = \varkappa_{r-1}, \quad 2\zeta_{r-1}\zeta'_{r-1} = \varkappa'_{r-1}$$

de donde

$$4\zeta^4_{r-1} - 4\varkappa_{r-1}\zeta^2_{r-1} + x^{\frac{1}{2^{-(r-1)}}}\varkappa'^2_{r-1} = 0.$$

Ahora bien, como $\varkappa_{r-1}$ es unidad positiva de P* también lo es $\varkappa^2_{r-1} - x^{2^{-(r-1)}}\varkappa'^2_{r-1}$, y como este elemento pertenece a K_{r-1} existe, por la hipótesis de inducción, su raíz cuadrada,

$$\pm\sqrt{\varkappa^2_{r-1} - x^{\frac{1}{2^{r-1}}}\varkappa'^2_{r-1}}$$

la cual es, a su vez, unidad de P* y elemento de K_{r-1}. Por consiguiente, uno, por lo menos, de los dos elementos

$$\frac{1}{4}\left[\varkappa_{r-1} \pm \sqrt{\varkappa^2_{r-1} - x^{2^{-(r-1)}}\varkappa'^2_{r-1}}\right]$$

es una unidad positiva de P* y pertenece a K_{r-1}. Sea, p. e.,

$$\frac{1}{4}\left[\varkappa_{r-1} + \sqrt{\varkappa^2_{r-1} - x^{2^{-(r-1)}}\varkappa'^2_{r-1}}\right]$$

la unidad positiva; entonces, por la hipótesis de inducción, existe la raíz cuadrada de este elemento y es una unidad de P* que pertenece a K_{r-1}. Poniendo

$$\zeta_{r-1} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\left[\varkappa_{r-1} + \sqrt{\varkappa^2_{r-1} - x^{2^{-(r-1)}}\varkappa'^2_{r-1}}\right]},$$

$$\zeta'_{r-1} = \frac{\varkappa'_{r-1}}{\pm 2\sqrt{\frac{1}{4}\left[\varkappa_{r-1} + \sqrt{\varkappa^2_{r-1} - x^{2^{-(r-1)}}\varkappa'^2_{r-1}}\right]}}$$

resulta $(\zeta_{r-1} + x^{2^{-r}}\zeta'_{r-1})^2 = \varkappa$ y como ζ_{r-1} es unidad de P*, $\varkappa'_{r-1}/2\zeta_{r-1}$ pertenece a P*, y como tanto $\varkappa'_{r-1}$ como ζ_{r-1} pertenecen a K_{r-1}, el elemento ς'_{r-1} pertenece también a K_{r-1}. Resulta, finalmente, que los elementos

$$\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left[\varkappa_{r-1}+\sqrt{\varkappa_{r-1}^2-x^{2^{-(r-1)}}\varkappa'^2_{r-1}}\right]}+x^{2^{-r}}\frac{\varkappa'_{r-1}}{\pm\sqrt{\varkappa_{r-1}+\sqrt{\varkappa_{r-1}^2-x^{2^{-(r-1)}}\varkappa'^2_{r-1}}}}$$

son raíces cuadradas de $\varkappa_r=\varkappa_{r-1}+x^{2^{-r}}\varkappa'_{r-1}$ y cumplen las condiciones del lema. c. q. d.

La demostración de la proposición *b*) resulta ahora inmediata, en efecto, si $a_{i0}\,x^{m_1+\frac{\beta_1}{2^{\alpha_1}}}$ es el término principal del elemento (1) de K^* y si éste es positivo, poniendo

$$\varkappa=x^{m_1+\frac{\beta_1}{2^{\alpha_1}}}\left[a_{10}+a_{11}\,x+\ldots+x^{p_1+\frac{\gamma_1}{2^{\delta_1}}}(a_{00}+a_{01}\,x+\ldots)+\ldots\right]$$

el paréntesis rectangular es una unidad positiva de P^*, luego, por el lema anterior, resulta que

$$x^{\frac{m_1}{2}+\frac{\beta_1}{2^{\alpha_1+1}}}\sqrt{a_{10}+a_{11}\,x+\ldots+x^{p_1+\frac{\gamma_1}{2^{\delta_1}}}(a_{00}+a_{01}\,x+\ldots)+\ldots}$$

es la raíz cuadrada de $\varkappa$.

c) *El cuerpo* K^* *posee infinitos automorfismos distintos del unidad.*—En efecto, el cuerpo K posee los automorfismos

$$a_0\,x^m+a_1\,x^{m+1}+a_2\,x^{m+2}+\ldots\ \rightleftharpoons\ a_0\,(x+t)^m+a_1\,(x+t)^{m+1}+a_2\,(x+t)^{m+2}+\ldots$$

siendo t un número real cualquiera. Estos automorfismos son prolongables, sucesivamente, a los cuerpos K_1, K_2, ..., K_i, ... En efecto, basta para ello [1] demostrar que el polinomio $y^2-x^{2^{-i}}$ es irreducible en $K_i[y]$ para todo i. Supongamos que no fuese así, entonces sería $y^2-x^{2^{-i}}=(\zeta_1 y+\zeta_2)(\zeta'_1 y+\zeta'_2)$, de donde

$$\zeta_1\zeta'_1=1,\quad \zeta_1\zeta'_2+\zeta'_1\zeta_2=0,\quad \zeta_2\zeta'_2=-x^{2^{-i}}$$

y de estas relaciones resultaría $\zeta_2^2=\zeta_1^2\,x^{2^{-i}}$, $\zeta_1,\zeta_2\in K_i$, relaciones imposibles por ser distintos los términos principales de los dos miembros.

Resulta, por consiguiente, que cada automorfismo de K da origen a un automorfismo, por lo menos, de K^*. Con esto queda probada la primera parte del teorema.

2.° *El postulado cuadrático es necesario.* Sea R el cuerpo de los números racionales, λ un número real transcendente, $K = R(\lambda)$. El cuerpo K posee una ordenación arquimediana: la inducida por la del cuerpo de los números reales y K no satisface al postulado cuadrático. Si

$$\frac{a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m+1} + \dots + a_r \lambda^{m+r}}{b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n+1} + \dots + b_s \lambda^{n+s}}, \quad b_i,\ a_j \in R, \quad i = 0, \dots, s, \quad j = 0, \dots, r$$

es un elemento arbitrario de K y t un número racional cualquiera, la correspondencia

$$\frac{a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m+1} + \dots + a_r \lambda^{m+r}}{b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n+1} + \dots + b_s \lambda^{n+s}} \rightleftharpoons \frac{a_0 (\lambda+t)^m + a_1 (\lambda+t)^{m+1} + \dots + a_r (\lambda+t)^{m+r}}{b_0 (\lambda+t)^n + b_1 (\lambda+t)^{n+1} + \dots + b_s (\lambda+t)^{n+s}}$$

es un automorfismo de K.

3.° *Las condiciones son suficientes.* Sea K un cuerpo que cumple las hipótesis del teorema y supongamos que σ sea un automorfimo del mismo. *σ es un automorfismo ordenado*, e. e., transforma elementos positivos en elementos positivos y elementos negativos en elementos negativos. En efecto, si p es un elemento positivo de K, por el postulado cuadrático existe el elemento $\sqrt{p}$, de donde $\sigma(p) = \sigma[(\sqrt{p})^2] = [\sigma(\sqrt{p})]^2$, luego $\sigma(p) > 0$. Como la demostración anterior es válida para cualquier automorfismo, sin más que considerar el inverso de σ, resulta que elementos negativos se transforman en negativos. Si el automorfismo σ no fuese el unidad, existiría un elemento, a, de K tal que $\sigma(a) \neq a$. Supongamos, para fijar el razonamiento, que $\sigma(a) > a$. Por el postulado de Arquímedes, existe un número natural, n, tal que $n[\sigma(a) - a] - 1 > 0$, de donde $\sigma(a) - a > \dfrac{1}{n}$ y por el mismo postulado, existe otro número racional entero, m, tal que

$$a < \frac{m}{n} < \sigma(a)$$

Ahora bien, como los automorfismos de K son ordenados, de

$a \leqslant \frac{m}{n}$ resulta $\sigma(a) \leqslant \sigma\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$, en contradicción con la relación anterior. El teorema está completamente demostrado.

En virtud de este teorema, toda la geometría proyectiva real de las figuras lineales y cuadráticas en que no intenvengan relaciones distintas de las cuadráticas, bicuadráticas, bibicuadráticas, ..., coinciden con la geometría proyectiva correspondiente a los espacios definidos sobre cuerpos que satisfagan al teorema anterior.

LITERATURA CITADA EN EL TEXTO

[1] V. d. Waerden: Moderne Algebra, I, 2.ª edición. Springer. Berlín.

Universidad de Zaragoza.

13 diciembre 1948.